האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)
סמסטר הסתיו – תשנ"ט – מועד א'

המורים: פרופ' עזריאל לוי, פרופ' אליהו שמיר   הזמן: שלוש שעות

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכיח.

1. א. כמה קשרים פסוקיים דו-מקומיים ישנם, עד כדי שקילות, כלומר כשהנך סופר רק קשר אחד בכל מחלקת קשרים שקולים זה לזה?
ב. האם יש קשר דו-מקומי אחד היוצר את יתר הקשרים הדו-מקומיים? מותר לך להשתמש בשלמות קבוצת הקשרים $\{\neg, \vee, \wedge\}$.
ג. יהי ϕ פסוק בתחשיב הפסוקים שכל הפסוקים היסודיים המופיעים בו הם מבין $\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n$.
נסמן ב- Π את קבוצת כל הפסוקים. תהי $c_\phi : \Pi^n \to \Pi$ הפונקציה המוגדרת ע"י
$$c_\phi(\psi_1, \ldots, \psi_n) = \mathrm{Sub}(\psi; \mathsf{P}_1, \ldots \mathsf{P}_n; \psi_1, \ldots, \psi_n)$$
. האם הפונקציה c_ϕ היא קשר פסוקי? הוכח!

2. א הגדר מהי קבוצה מושתתת של פסוקים בתחשיב הפסוקים, וקבע אם זהו מושג תחבירי או סמנטי.
ב. הוכח שלכל קבוצה מושתתת של פסוקים שאינה מכילה פסוק יסודי ושלילתו יש מודל.

3. א. הגדר את המושג של מערכת אקסיומות קטגורית למבנה בתחשיב היחסים.
ב. כתוב את שלוש אקסיומות פיאנו P1–P3 למספרים הטבעיים (אלו הן האקסיומות העוסקות במספר 0 וביחס העוקב S בלבד).
ג. הוכח שאקסיומות אלו הן מערכת אקסיומות קטגורית למבנה המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$.

4. א. הגדר מתי שם עצם t כשר להצבה עבור משתנה אישי x בנוסחה ϕ.
ב. נסח את משפט ההצבה של שמות עצם עבור הופעות חופשיות של משתנים אישיים.
ג. תן דוגמה לשתי הצבות שאינן כשרות, האחת שאינה מקיימת את מסקנת משפט ההצבה, והשניה המקיימת את מסקנת משפט ההצבה.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)
סמסטר הסתיו – תשנ"ט – מועד ב'

המורים: פרופ' עזריאל לוי, פרופ' אליהו שמיר הזמן: שלוש שעות

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכית.

1. נסח והוכח את משפט השלמות מבחינת לוחות האמת של תחשיב הפסוקים.

2. א. בתחשיב פסוקים המשתמש בסימני הקשרים $\vee$ ו- $\neg$ בלבד כתוב את שלושת כללי עץ האמת.
ב. הוכח עבור תחשיב זה שאם $\mathcal{A}$ הוא מודל לקבוצת הפסוקים הנמצאת בשורש עץ אמת אז קיים ענף לעץ זה אשר כל הפסוקים הנמצאים בצמתים שלו אמיתיים ב-$\mathcal{A}$.

3. א. בשפה מסדר ראשון עם קבוע יחס דו-מקומי G (בנוסף על השיוויון) כתוב פסוק ϕ האומר ש- G מתאר גרף פשוט, כלומר G הוא יחס השכנות בגרף בו שני צמתים מחוברים על ידי לכל היותר צלע אחת, וכל צלע מחברת שני צמתים שונים.
ב. כתוב קבוצת פסוקים Γ מסדר ראשון כך שהמודלים של $\Gamma \cup \{\phi\}$ הם בדיוק כל הגרפים הפשוטים ללא מעגלים, כלומר ללא סדרות $a_1, \ldots, a_n$ של צמתים שונים זה מזה, עם $n \geq 3$, כך שכל שני צמתים סמוכים בסידרה מחוברים ע"י צלע וגם הצמתים a_n ו- a_1 מחוברים ע"י צלע.
ג. הוכח בעזרת משפט הקומפקטיות שלא קיים פסוק ψ מסדר ראשון השקול לקבוצת הפסוקים $\Gamma \cup \{\phi\}$, כלומר, לא קיים פסוק ψ כך שהמודלים של ψ הם בדיוק המודלים של $\Gamma \cup \{\phi\}$.

4. הוכח שבשפה מסדר ראשון קבוצת המסקנות הלוגיות של קבוצת פסוקים כריעה היא כריעה חיובית. מותר לך להשתמש במשפט שקבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית בתחשיב מסדר ראשון היא כריעה חיובית.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)
סמסטר הסתיו – תשנ"ט – מועד ג'

המורים: פרופ' עזריאל לוי, פרופ' אליהו שמיר הזמן: שלוש שעות

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכית.

1. הוכח שבתחשיב הפסוקים כל פסוק שקול לפסוק בצורת אווי נורמלית.

2. בתחשיב הפסוקים תהי $\psi \rightarrow \phi$ טאוטולוגיה, היכן ש-ϕ פסוק אשר בו מופיעים הפסוקים היסודיים P, Q בלבד ו-ψ פסוק אשר בו מופיעים הפסוקים היסודיים Q, R בלבד. הוכח שקיים פסוק χ אשר מופיע בו הפסוק היסודי Q בלבד כך ששני הפסוקים $\chi \rightarrow \phi$ ו- $\psi \rightarrow \chi$ הם טאוטולוגיות.

3. א. תן דוגמה לפסוק בתחשיב היחסים שהוא טאוטולוגיה.
ב. הוכח שכל טאוטולוגיה בתחשיב היחסים היא אמיתית לוגית.
ג. הבא שתי דוגמאות בעלות אופי שונה זה מזה של פסוקים בתחשיב היחסים שהם אמיתיים לוגית אך אינם טאוטולוגיות.

4. א. מהו ההבדל בין התחשיב מסדר ראשון ללא שיוויון ובין התחשיב מסדר ראשון עם שיוויון? שים לב לכך שגם בתחשיב ללא שיוויון מותר השימוש בסימן השיוויון $\approx$.
ב. בהסתמך על משפט הקומפקטיות לתחשיב מסדר ראשון ללא שיוויון הוכח את משפט הקומפקטיות לתחשיב מסדר ראשון עם שוויון.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) לתלמידי תלפיות (80423)

סמסטר הסתיו – תשנ"ט – מועד א'

המורים: פרופ' עזריאל לוי, פרופ' אליהו שמיר הזמן: שעתיים

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכית.

1. א. הגדר את המושג שאיבר נוצר a קודם לאיבר נוצר b באלגברת יצירה יחידה.
ב. הוכח שבאלגברת יצירה של ביטויים, ביטוי נוצר ψ קודם לביטוי נוצר ϕ אסם ψ הוא קטע של ϕ.

2. א. יהיו $\phi, \phi'\psi, \psi'$ פסוקים בתחשיב הפסוקים. הוכח שאם $\phi \equiv \phi'$ ו- $\psi \equiv \psi'$ אז $\phi \to \psi \equiv \phi' \to \psi'$.
ב. הוכח משפט כללי יותר מ-א', המניח את אותן ההנחות כמו א' אבל יש לו מסקנה כללית יותר שהמסקנה של א' היא מקרה פרטי שלה.
ג. תהי $\psi \vee \phi$ טאולוגיה בתחשיב הפסוקים. האם אחד הפסוקים ϕ ו- ψ חייב להיות טאוטולוגיה? הוכח או הבא דוגמה נגדית.

3 א.כתוב את שני הנוסחים של משפט הקומפקטיות של תחשיב הפסוקים והוכח את שקילותם.
ב. סקור את הצעדים העיקריים בהוכחת משפט הקומפקטיות לקבוצה בת מניה של פסוקים בתחשיב הפסוקים, כולל את בניית המודל. סקירה זאת צריכה לכלול ניסוח מלא של כל ההגדרות ומשפטי העזר, ובהוכחות כאשר מוכיחים מקרה טיפוסי אפשר לומר שמקרים אחרים מוכחים באופן דומה.

4. נסח בשפת תחשיב היחסים את הטענות הבאות.
בשפת תורת השדות בה יש קבועים ל-0 ול-1 ולפעולות החיבור והכפל (מתייחס לחלקים א'–ג'):
א. לכל משוואה אלגבריח ממעלה 3 (בה מקדם x^3 אינו אפס) יש פיתרון.
ב. אין לשדה שדה חלקי ממש.
ג. השדה הוא בעל מציין 0.
ד. היחס שסימנו הוא E הוא יחס שקילות, והקבוצה (היחס החד-מקומי) שסימנה U מכילה בדיוק אבר אחד מכל מחלקת שקילות של יחס זה.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)
סמסטר הסתיו – תשנ"ט – מועד ב' לתלמידי תלפיות

המורים: פרופ' עזריאל לוי, פרופ' אליהו שמיר הזמן: שלוש שעות

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכית.

1. יהי ϕ ביטוי נוצר באלגברת היצירה של הביטויים. הוכח שכל אופרטור המופיע ב-ϕ הוא הסימן הראשי של קטע יחיד של ϕ שהוא ביטוי נוצר.

2. א. אלו מבין הפונקציות c_1 עד c_4 הבאות הן קשרים פסוקיים? הוכח!
היכן שמופיע כאן P הוא מסמן פסוק יסודי קבוע שאינו שונה ל-ϕ-ים שונים.

$$c_1(\phi,\psi)=\begin{cases}\phi\vee\psi & \text{אם } P \text{ מופיע ב-}\phi\\ (\phi\to\psi)\to\psi & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$c_2(\phi,\psi)=\begin{cases}\phi\wedge\psi & \text{אם } \phi \text{ או } \psi \text{ טאוטולוגיה}\\ \phi\vee\psi & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$c_3(\phi)=P\vee\neg P$$

$$c_4(\phi,\psi)=\psi$$

ב. נתונות שתי הטענות הבאות לפסוקים ϕ,ψ,χ בתחשיב הפסוקים:
(i) $\phi\wedge\psi\models\chi$ אםם $\phi\models\chi$ או $\psi\models\chi$
(ii) $\phi\vee\psi\models\chi$ אםם $\phi\models\chi$ וגם $\psi\models\chi$
האם הן נכונות לכל ϕ,ψ,χ? אם התשובה היא שלילית אז הראה אילו משני הכוונים של ה-"אםם" אינו נכון.

3. יהי ϕ פסוק של תחשיב הפסוקים, ויהיו $P_1,P_2,\ldots,P_n$ פסוקים יסודיים שונים זה מזה.
א. תן הגדרה רקורסיבית להצבה בבת אחת של פסוקים $\psi_1,\psi_2,\ldots\psi_n$ עבור $P_1,P_2,\ldots,P_n$ ב-ϕ.
ב. נסח והוכח את המשפט המאפשר לחשב את הערך במבנה $\mathcal{A}$ של הפסוק ϕ' המתקבל מ-ϕ ע"י ההצבה הנ"ל מתוך ערך האמת של הפסוק ϕ עצמו במבנה מסויים.

4. נסח בשפת תחשיב היחסים את הטענות הבאות.

א. אקסיומת החסם העליון בשדה סדור.

ב. בשפה המכילה קבועים לאפס, לאחד לחיבור ולכפל, שבמספרים הטבעיים יש איסוף ראשוניים תאומים, כלומר מספרים p כך ש-p וגם $p+2$ הם ראשוניים.

ג. שלגרף יש בדיוק שני רכיבי קשירות.

בהצלחה!